

# CALCUL DIFFERENTIEL

Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

Note sur la différentiabilité

1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow E$  où  $E$  est un de dim. finie

$df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, E)$  et l'on a  $\boxed{f'(a) = df(a)(1)}$   
 (où  $f'(a)$  désigne la dérivée de  $f$  en  $a$ , ie par def.  $f'(a) \doteq \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ )  
 Ainsi:  $\boxed{df(a)(h) = h f'(a)} \quad \forall h \in \mathbb{R}$

preuve: La def. de  $df(a)$  s'écrit

$$\|f(a+h) - f(a) - df(a)(h)\| = o(\|h\|)$$

Mais  $df(a)$  étant linéaire de  $\mathbb{R}$  vers  $E$ ,  $df(a)(h) = h df(a)(1)$  d'où:

$$\left\| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - df(a)(1) \right\| = o(1)$$

ce qui signifie bien que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = df(a)(1)$  ie  $df(a)(1) = f'(a)$ .

CQFD

2)  $E, F$  evn

Toute appl. linéaire  $l: E \rightarrow F$  est différentiable, de différentielle au pt  $x \in E$  elle-même, ie:

$$\forall x \in E \quad dl(x) = l \in \mathcal{L}(E, F)$$

preuve:  $\|l(a+h) - l(a) - l(h)\| = 0 = o(\|h\|)$

CQFD.

3)  $f: E = E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$   $E_i, F$  evn

Si  $f$  différentiable en  $a$ , on voit que chacune des appl. partielles  $f_i$  de  $f$  en  $a$  définies par  $f_i: E_i \rightarrow F$  est différentiable

$$x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

et que, en notant  $\partial_i f(a)$  ou  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  cette différentielle  $df_i(a)$ , on a:

$$\boxed{df(a)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i}$$

$$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in E$$

On peut écrire :  $h_i = dx_i(h)$  où  $dx_i = pr_i = i$ -projection :  $E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow E_i$   
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$

donc  $\boxed{df(a) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \circ dx_i}$   
 $\mathcal{L}(E, F) \quad \mathcal{L}(E_i, F) \quad \mathcal{L}(E, E_i)$

$pr_i$  étant linéaire,  $pr_i$  est différentiable et sa différentielle en  $a$  est  $pr_i$  :  
 $d(pr_i)(a) = pr_i$ , ce qui justifie la notation  $dx_i$  (pour  $pr_i$ )

• Cas où  $E_1 = \dots = E_n = \mathbb{R}$  et  $F = \mathbb{R}$  : On a 2 réductions possibles

a)  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathcal{L}(E_i, F)$  s'écrit  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(h_i) = \underbrace{f'_i(a)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{h_i}_{\in \mathbb{R}}$

où  $f'_i(a)$  est le nbre dérivé de  $f_i$  en  $a$ . mult. dans  $\mathbb{R}$

On écrit encore  $f'_i(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  pour simplifier.

Les formules préc. s'écrivent :

$$df(a)h = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \underbrace{h_i}_{\in \mathbb{R}}$$

et  $df(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$

b) Si  $(e_1, \dots, e_n)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  (ie  $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow i$ -place)

$dx_i = pr_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est égal à  $e_i^* \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$ .

$(dx_1, \dots, dx_n)$  est la base duale  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  de  $E$  et  $df(a) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$   
 est l'expression du vecteur  $df(a) \in E^*$  dans la base  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ .

$$\begin{array}{ccc} df : E = \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E^* \text{ rapporté à la base} \\ \text{rapporté à la} & & \text{duale } (e_1^*, \dots, e_n^*) = (dx_1, \dots, dx_n) \\ \text{base } (e_1, \dots, e_n) & & \\ a & \longmapsto & \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \end{array}$$

On constate que  $df$  est continuessi chacune des appl.  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : E \rightarrow \mathbb{R}$  est continue. On retrouve une partie du Th.  $C^1$  :

||  $f : E = E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$  est de classe  $C^1$   
 ||ssi chacune des dérivées partielles existent et est continue

On considère les applications :

$$N_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$N_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sum_{i=1}^n |x_i|$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Chercher les points de  $\mathbb{R}^n$  où ces applications sont différentiables, et exhiber la différentielle quand elle existe.

(réf. Serfati III.5.7)

1) Étude de  $N_2$  :  $N_2$  est continue (c'est une des normes canoniques de  $\mathbb{R}^n$ )

1<sup>re</sup> méthode : On cherche les dérivées partielles de  $N_2$ . Au point  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , la  $i$ -ième application partielle est :

$$N_{2,i} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto N_2(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) = \sqrt{t^2 + \sum_{j \neq i} x_j^2}$$

$N_{2,i}$  sera dérivable en  $t = x_i$  si  $x \neq 0$  et :

$$\frac{\partial N_2}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} = \frac{x_i}{N_2(x)}$$

L'application  $\frac{\partial N_2}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  est continue en tout point  $x \neq 0$ ,  
 $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \frac{x_i}{N_2(x)}$

donc  $N_2$  sera continûment différentiable sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et :

$$dN_2(x)h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_2}{\partial x_i}(x) h_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{N_2(x)} h_i = \frac{\sum_{i=1}^n x_i h_i}{N_2(x)}$$

NB : Si  $x=0$ , les dérivées partielles n'existent pas en 0 donc  $N_2$  ne sera pas différentiable en 0.

2<sup>e</sup> méthode : On sait que toute appl. bilinéaire continue continue

$\beta : E \times F \rightarrow H$ , où  $E, F, H$  sont des evn, est différentiable et :

$$d\beta(x,y)(h,k) = \beta(x,k) + \beta(h,y)$$

(ce qui montre, au passage, que  $d\beta : E \times F \rightarrow \mathcal{L}(E \times F, H)$  est linéaire donc  $C^\infty$ , car :

$d^2\beta(x,y) = d(d\beta)(x,y) = d\beta$  donc  $d^2\beta : E \times F \rightarrow \mathcal{L}(E \times F, \mathcal{L}(E \times F, H))$  est une appl.

constante, donc de différentielles de tous ordres nulles.)

Donc :

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^n \xrightarrow{i} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \mathbb{R} \\ x \mapsto (x, x) \\ (x, y) \mapsto (x|y) \\ t \mapsto \sqrt{t} \end{array}$$

Si  $x \neq 0$ , soit  $(x) = (x|x) \neq 0$  et  $\sqrt{\cdot}$  sera différentiable en  $t_0 = (x|x)$ .  $N_2$  le sera aussi et :

$$dN_2(x) = d(\sqrt{\cdot})(x|x) \circ df(x, x) \circ \underbrace{di(x)}_{= i \text{ car } i \text{ linéaire}}$$

$$dN_2(x)h = d(\sqrt{\cdot})(x|x) \circ \underbrace{df(x, x)(h, h)}_{= 2f(x, h) = 2(x|h)}$$

Comme  $(\sqrt{t})' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ , on conclut :

$$dN_2(x)h = \frac{1}{2\sqrt{(x|x)}} \cdot 2(x|h) = \frac{(x|h)}{\sqrt{(x|x)}}$$

dès que  $x \neq 0$

2) Etude de  $N_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$N_1$  est continue (c'est une norme canonique de  $\mathbb{R}^n$ ). Fixons  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et exhibons la  $i$ -ème application partielle de  $N_1$  en  $x$  :

$$\begin{array}{c} N_{1,i} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto |t| + \sum_{j \neq i} |x_j| \end{array}$$

$N_{1,i}$  est dérivable en tout point  $t \neq 0$  et  $N_{1,i}'(t) = \text{Sgn } t = \frac{t}{|t|}$ , donc  $N_1$  sera dérivable par rapport à  $x_i$  en tout point  $x$  tel que  $x_i \neq 0$ , et :

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_i}(x) = \text{Sgn } x_i = \frac{x_i}{|x_i|}$$

Cf :  $N_1$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n = 0\}$  et

$$dN_1(x)h = \sum_{i=1}^n \text{Sgn } x_i h_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i h_i}{|x_i|} \quad \text{en tout pt de cet ouvert.}$$

$N_1$  n'est pas différentiable en  $x$  tel que  $x_1 x_2 \dots x_n = 0$  car si  $x_i = 0$ ,  $\frac{\partial N_1}{\partial x_i}(x)$  n'existe pas !



Soient  $E$  et  $F$  deux Banach. Notons  $\text{Isom}(E, F)$  le sev de  $\mathcal{L}(E, F)$  formé des isomorphismes (ie des homéomorphismes linéaires) de  $E$  sur  $F$ .

a) Mq  $\text{Isom}(E, F)$  est un ouvert de  $\mathcal{L}(E, F)$

(Ind. Si  $u_0 \in \text{Isom}(E, F)$ , et  $u$  proche de  $u_0$ , on pourra écrire  $u_0^{-1} \circ u = \text{Id} - v$  et chercher une condition sur  $u$  pour que  $\text{Id} - v$  soit inversible ...)

b) Mq :  $\varphi : \text{Isom}(E, F) \longrightarrow \text{Isom}(F, E)$

$$u \longmapsto u^{-1}$$

est continue (Ind. : Utiliser l'inverse de  $1 - u$  dans l'algèbre de Banach  $\mathcal{L}(E)$  quand  $\|u\| < 1$ )

c) Mq  $\varphi$  est de classe  $C^1$  dans l'ouvert  $\text{Isom}(E, F)$ , de différentielle :

$$d\varphi(u)h = u^{-1} \circ h \circ u^{-1} \quad \forall h \in \mathcal{L}(E, F)$$

(réf. Cartan Calc Diff p 22, p 34)

d) prouver que  $(\text{Isom}(E), \circ)$  est un groupe topologique.

a) Soit  $u_0 \in \text{Isom}(E, F)$ .  $u_0^{-1} \circ u = \text{Id} - v$  est inversible dès que  $\|v\| < 1$ .

$$\text{On a : } \|v\| = \|\text{Id} - u_0^{-1} \circ u\| = \|u_0^{-1} (u_0 - u)\| \leq \|u_0^{-1}\| \|u_0 - u\|$$

$$\text{Ainsi } \|u - u_0\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|} \Rightarrow u_0^{-1} \circ u \text{ inversible} \Rightarrow u \text{ inversible}$$

ce qui prouve que  $\text{Isom}(E, F)$  est un ouvert de  $\mathcal{L}(E, F)$

NB : On obtient m l'expression de  $u^{-1}$  pour  $\|u - u_0\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$  :

$$\underbrace{(u_0^{-1} \circ u)^{-1}}_{u^{-1} \circ u_0} = (\text{Id} - v)^{-1} = \sum_{k \geq 0} v^k \Rightarrow u^{-1} = \sum_{k \geq 0} (\text{Id} - u_0^{-1} \circ u)^k \circ u_0^{-1}$$

b) Avec les notations du a) :

$$\begin{aligned} u_0^{-1} \circ u = \text{Id} - v &\Rightarrow u = u_0 (1 - v) \Rightarrow u^{-1} - u_0^{-1} = (1 - v)^{-1} u_0^{-1} - u_0^{-1} \\ &= ((1 - v)^{-1} - 1) u_0^{-1} \quad \text{dès que } \|u - u_0\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \|u^{-1} - u_0^{-1}\| &\leq \|u_0^{-1}\| \|(1 - v)^{-1} - 1\| \leq \|u_0^{-1}\| \sum_{k \geq 1} \|v\|^k = \|u_0^{-1}\| \frac{\|v\|}{1 - \|v\|} \\ &= \sum_{k \geq 1} \|v\|^k - 1 = \sum_{k \geq 1} \|v\|^k \end{aligned}$$

De  $\|v\| \leq \|u_0'\| \|u - u_0\|$ , on déduit

$$\|u^{-1} - u_0^{-1}\| \leq \frac{\|u_0^{-1}\|^2}{1 - \|v\|} \|u - u_0\| \leq \frac{\|u_0^{-1}\|^2}{\frac{1}{2}} \|u - u_0\|$$

d'où que  $\|u - u_0\| \leq \frac{1}{2\|u_0'\|}$ . D'où la continuité de  $\varphi$ .

c)

\* Il faut montrer que :

$$\Delta(h) = \|\varphi(u+h) - \varphi(u) - u^{-1}hu^{-1}\| \leq \varepsilon \|h\| \quad \text{pour } \|h\| < \gamma.$$

On a :

$$\Delta(h) = \|(u+h)^{-1} - u^{-1} - u^{-1}hu^{-1}\|$$

$$\text{et } (u+h)^{-1} = ((1+hu^{-1})u)^{-1} = u^{-1}(1+hu^{-1})^{-1} = u^{-1} \sum_{k \geq 0} (hu^{-1})^k \quad \text{pour } \|hu^{-1}\| < 1, \text{ i.e.}$$

dès que  $\|h\| < \frac{1}{2\|u^{-1}\|}$

Sous cette hyp., on aura :

$$\Delta(h) = \left\| u^{-1} \sum_{k \geq 0} (hu^{-1})^k - u^{-1} - u^{-1}hu^{-1} \right\| = \left\| \sum_{k \geq 2} (hu^{-1})^k \right\| \leq \frac{\|hu^{-1}\|^2}{1 - \|hu^{-1}\|} = \frac{\|u^{-1}\|^2}{1 - \|hu^{-1}\|} \|h\|^2$$

$$\text{et } 1 - \|hu^{-1}\| \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \|hu^{-1}\| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \|h\| \leq \frac{1}{2\|u^{-1}\|}$$

Pour  $\|h\| \leq \frac{1}{2\|u^{-1}\|}$ , on aura donc :

$$\Delta(h) \leq 2\|u^{-1}\|^2 \|h\|^2$$

d'où la différentiabilité de  $\varphi$  en  $u$ .

\*  $\varphi$  est  $C^1$  sur  $\text{Isom}(E, F)$  : Il faut prouver que

$$d\varphi : \text{Isom}(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E, F), \mathcal{L}(E, F))$$

$$u \longmapsto d\varphi(u) \quad / \quad d\varphi(u)h = u^{-1}hu^{-1}$$

est continue.

$$\text{L'application } \varphi : \mathcal{L}(F, E) \times \mathcal{L}(F, E) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E, F), \mathcal{L}(E, F))$$

$$(v, w) \longmapsto (h \mapsto vohow)$$

est bilinéaire, continue car  $\forall h \quad \|vohow\| \leq \|v\| \|h\| \|w\|$

$$\text{d'où } \|\varphi(v, w)\| \leq \|v\| \|w\|.$$

.../...

$$d\varphi(u) = \varphi(u^{-1}, u^{-1}) = \varphi \circ \tilde{\varphi}(u) \quad \text{ou} \quad \tilde{\varphi} : \text{Isom}(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(F, E) \times \mathcal{L}(F, E) \\ u \longmapsto (u^{-1}, u^{-1})$$

Soit  $d\varphi = \varphi \circ \tilde{\varphi}$ .  $d\varphi$  est continue comme composée de 2 appl. continues.

d)  $(G, \cdot)$  est un groupe topologique si les applications définissant la structure de groupe de  $G$ , à savoir :

$$u \longmapsto u^{-1}$$

$$(u, v) \longmapsto u \cdot v$$

sont continues (sur  $G$  ou  $G \times G$ ).

On a vu que  $\varphi : \text{Isom}(E, E) \longrightarrow \text{Isom}(E, E)$  était continue au b).  
 $u \longmapsto u^{-1}$

Montrons que  $\mathfrak{I} : (\text{Isom}(E, E))^2 \longrightarrow \text{Isom}(E, E)$  est continue.  
 $(u, v) \longmapsto u \circ v$

C'est facile car  $\mathfrak{I}$  est bilinéaire et  $\|\mathfrak{I}(u, v)\| = \|u \circ v\| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v$ .

NB : a) On peut aussi le redémontrer rapidement :

$$\|uv - u_0v_0\| \leq \|v\| \|u - u_0\| + \|u_0\| \|v - v_0\|$$

b)  $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ) = \underline{\text{algèbre de Banach}}$  (dès que  $E$  est un Banach)

ce qui signifie que  $\ast (\mathcal{L}(E), +, \cdot)$  est un  $\mathbb{R}$ -e.v

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$  est un anneau

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall u, v \in \mathcal{L}(E) \quad (\lambda u) \circ v = \lambda(u \circ v) = u \circ (\lambda v)$$

Algèbre

$\ast \mathcal{L}(E)$  est un e.v normé par  $\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$

$$\|Id\| = 1$$

$$\|u \circ v\| \leq \|u\| \|v\|$$

Algèbre normée

$\ast \mathcal{L}(E)$  est un e.v.n. complet pour la norme  $\|\cdot\|$  } Algèbre de Banach



Extrêmes de  $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

La CN d'extrémum est :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 = 0 \Rightarrow xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x} \end{cases}$$

$$\text{d'où } 3x^2 + 3 \frac{4}{x^2} - 15 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$\Delta = 9 \quad x^2 = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} \text{ donc } x = \pm 2 \text{ ou } \pm 1.$$

Il y a 4 pts singuliers pour  $f$  :  $(x,y) = (\pm 2, \pm 1) \text{ ou } (\pm 1, \pm 2)$

$$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y \end{cases}$$

$$\bullet \text{ En } (x,y) = (2,1), \begin{cases} r = t = 12 \\ s = 6 \end{cases} \quad rt - s^2 = 144 - 36 = 108 > 0 \text{ et } r > 0$$

donc  $d^2f(2,1) \mathbb{R}^2$  est une forme quadratique définie positive.  $f$  admet un minimum relatif en  $(2,1)$ .

$$\bullet \text{ En } (x,y) = (-2,-1), \begin{cases} r = t = -12 \\ s = -6 \end{cases} \quad rt - s^2 = 108 > 0 \text{ et } r < 0.$$

$f$  admet un maximum relatif strict en  $(-2,-1)$

$$\bullet \text{ En } (x,y) = (\pm 1, \pm 2), \begin{cases} r = t = \pm 6 \\ s = \pm 12 \end{cases} \quad rt - s^2 = 36 - 144 < 0 \text{ donc } f$$

n'admet pas d'extrémum en ces pts.

Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par : 
$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Ma  $f$  est continue en 0, admet des dérivées partielles en  $(0,0)$  mais n'est pas différentiable en ce point.

---

\* La continuité en 0 provient de :

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta)| = |r \cos^2 \theta \sin \theta| \leq |r| \leq \epsilon \quad \text{dès que } |r| \leq \epsilon.$$

\*  $f$  admet des dérivées partielles en 0 car :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0 \end{cases}$$

\* La différentiabilité de  $f$  en  $(0,0)$  équivaut à :

$$\forall \epsilon \quad \exists \eta \quad \|(x,y)\| < \eta \Rightarrow \|f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)(x,y)\| \leq \epsilon \|(x,y)\|$$

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - ax - by \right| \leq \epsilon \sqrt{x^2 + y^2}$$

En faisant  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , on obtient la condition équivalente :

$$|\cos^2 \theta \sin \theta - a \cos \theta - b \sin \theta| \leq \epsilon \quad \forall \epsilon \geq 0$$

donc  $\cos^2 \theta \sin \theta - a \cos \theta - b \sin \theta = 0 \quad \forall \theta$ , ce qui est absurde.

NB :  $f$  est continûment différentiable sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$  car admet des dérivées partielles continues en tout point  $(x,y)$  distinct de  $(0,0)$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4 - x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

Les dérivées partielles ne seront pas continues en 0, comme on le vérifie :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = 2 \cos \theta \sin^3 \theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \cos^4 \theta - \cos^2 \theta \sin^2 \theta = \cos^2 \theta \cdot \cos 2\theta.$$

$X$  ensemble

$E$  e.v.

$\mathcal{B} = \mathcal{B}(X, E) =$  ens. des fcts bornées de  $X$  dans  $E$ .

$$\mathcal{B} \subset E^X \quad \text{or} \quad \mathcal{B} = \{ f \in E^X / \|f\|_\infty \doteq \sup_{x \in X} \|f(x)\| < \infty \}$$

$E^X$  est un e.v.  $\mathcal{B}$  est un seu de  $E^X$ , normé par  $\|\cdot\|_\infty$ .

$$\| E \text{ Banach} \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ Banach}$$

preuve:

( $\Rightarrow$ ) Soit  $(f_n)_n$  une suite de Cauchy de  $\mathcal{B}$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad n, p > N \Rightarrow \|f_n - f_p\|_\infty < \varepsilon$$

$$\sup_{x \in X} \|f_n(x) - f_p(x)\| < \varepsilon$$

$(f_n(x))_n$  est donc une suite de Cauchy de  $E$ , complet, donc converge vers un élément  $f(x) \in E$ . On définit ainsi une fct  $f \in E^X$ .

• f est bornée et  $\lim f_n = f$  :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad n, p > N \quad \forall x \in X \quad \|f_n(x) - f_p(x)\| < \varepsilon$$

Fixons  $n > N$  et  $x \in X$ , et faisons tendre  $p$  vers  $+\infty$ . On obtient :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \quad n > N \quad \forall x \in X \quad \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad (*)$$

ce qui prouve que  $f_n$  converge vers  $f$  pour  $\|\cdot\|_\infty$

(\*) montre aussi que  $f_n - f$  est bornée sur  $X$ , donc il en sera de même de  $f = (f - f_n) + f_n$ .

Cel :  $(f_n)_n$  converge vers  $f \in \mathcal{B}$  pour  $\|\cdot\|_\infty$ .

( $\Leftarrow$ ) Si  $(x_n)$  est une suite de Cauchy de  $E$ , on pose :  $f_n(x) \doteq x_n \quad \forall x \in X$ .

La suite de fcts constantes  $(f_n)_n$  est de Cauchy dans  $\mathcal{B}$ , donc converge vers  $f \in \mathcal{B}$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad n > N \quad \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \quad (\text{ie } \forall x \in X \quad \|x_n - f(x)\| < \varepsilon)$$

On a montré que  $(x_n)_n$  tend vers  $f(x)$  dans  $E$  (pour  $x$  fixé quelconque, ce qui montre au passage que  $f$  est une application constante).

a) Soit application multilinéaire continue  $\beta: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$  d'un produit d'e.v.n. dans un e.v.n. est de classe  $C^\infty$ , et que pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ :

$$d\beta(x_1, \dots, x_n)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \beta(x_1, \dots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

b) Donnons nous un e.v.n.  $E$  et  $n$  applications différentiables  $g_i: E \rightarrow E_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Montrez que l'application:

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto \beta(g_1(x), \dots, g_n(x)) \end{aligned}$$

est différentiable et calculer sa différentielle en  $x \in E$ .

c) Application: Donner des exemples d'application du b) (On pourra penser aux fonctions:

$$\begin{aligned} t &\mapsto (\vec{u}(t) | \vec{v}(t)) ; \quad t \mapsto \vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t) ; \quad t \mapsto \det_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ t &\mapsto \beta_1(t) \cdot \beta_2(t) \dots \beta_n(t) \text{ quand } \beta_i(t) \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

a) Chaque application partielle  $\beta_i: E_i \rightarrow F$  est

$$h_i \mapsto \beta(x_1, \dots, h_i, \dots, x_n)$$

linéaire continue, donc différentiable et  $\partial_i \beta(x_1, \dots, x_n) = d\beta_i(x_i) = \beta_i$ . Les dérivées partielles existent donc en tout point  $(x_1, \dots, x_n)$ . Si l'on montre qu'elles sont continues sur  $E_1 \times \dots \times E_n$ , on pourra conclure à la différentiabilité de  $\beta$  (et même à son appartenance à la classe  $C^1$ ).

Gna :

$$E_1 \times \dots \times E_n \xrightarrow{\partial_i f} \mathcal{L}(E_i, F)$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \beta_i = \beta(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$\partial_i f$  sera bien continue comme composée de la projection (continue) :

$$P : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

suivie de  $g : E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n \longrightarrow \mathcal{L}(E_i, F)$

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \mapsto \beta(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

qui est continue puisque  $(n-1)$ -linéaire et vérifiant :

$$\|\beta(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n)\| \leq \|\beta\| \|x_1\| \dots \|x_{i-1}\| \|x_{i+1}\| \dots \|x_n\|$$

(puisque  $\|\beta(x_1, \dots, x_n)\| \leq \|\beta\| \|x_1\| \dots \|x_n\|$  par hypothèse !)

Ccl :  $\beta$  est de classe  $C^1$  et :

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i \beta(x) \circ dx_i$$

ou encore :

$$df(x)h = \sum_{i=1}^n \beta(x_1, \dots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

(où  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $h = (h_1, \dots, h_n)$ )

b) Posons  $g : E \longrightarrow E_1 \times \dots \times E_n$

$$x \mapsto (g_1(x), \dots, g_n(x))$$

$\beta \circ g$  sera différentiable comme composée de 2 appl. différentiables, et :

$$d(\beta \circ g)(x) = d\beta(g(x)) \circ dg(x)$$

$$d(\beta \circ g)(x)h = d\beta(g_1(x), \dots, g_n(x)) (dg_1(x)h, \dots, dg_n(x)h)$$

$$= \sum_{i=1}^n \beta(g_1(x), \dots, g_{i-1}(x), dg_i(x)h, g_{i+1}(x), \dots, g_n(x))$$

que l'on peut retenir ainsi :

$$d(\beta(g_1, \dots, g_n)) = \sum_{i=1}^n \beta(g_1, \dots, g_{i-1}, dg_i, g_{i+1}, \dots, g_n)$$



c)

1)  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont des appl. diff. d'un e.v.n  $H$  dans un e.v.n  $E$  qui sera en fait :

- un préhilbertien réel (pour définir  $\Psi$ )
- un espace euclidien orienté de dimension 3 (pour  $\Psi$ ).

On considère :

$$\begin{aligned} H &\xrightarrow{\Psi} \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (\vec{u}(t) | \vec{v}(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &\xrightarrow{\Psi} \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t) \end{aligned}$$

Ces appl. sont diff. et :

$$d\Psi(t)h = (\vec{u}(t) | d\vec{v}(t)h) + (d\vec{u}(t)h | \vec{v}(t))$$

$$d\Psi(t)h = \vec{u}(t) \wedge d\vec{v}(t)h + d\vec{u}(t)h \wedge \vec{v}(t)$$

Si  $H = \mathbb{R}$ ,  $d\Psi(t)h = \Psi'(t)h$  et l'on obtient les dérivées :

$$((\vec{u}(t) | \vec{v}(t)))' = (\vec{u}(t) | \vec{v}'(t)) + (\vec{u}'(t) | \vec{v}(t))$$

$$(\vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t))' = \vec{u}(t) \wedge \vec{v}'(t) + \vec{u}'(t) \wedge \vec{v}(t)$$

2) Si  $x_1, \dots, x_n$  sont des applications diff. de l'e.v.n  $H$  dans l'espace euclidien  $E$  de dimension  $n$ , on peut considérer l'application :

$$\begin{aligned} \Sigma : H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \det(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

où  $\det(\cdot, \dots, \cdot)$  désigne le déterminant dans une base qque, fixée, de  $E$ .

Le b) montre que  $\Sigma$  est différentiable et que :

$$d\Sigma(t)h = \sum_{i=1}^n \det(x_1(t), \dots, x_{i-1}(t), dx_i(t)h, x_{i+1}(t), \dots, x_n(t))$$

Si  $H = \mathbb{R}$ , cette formule devient :

$$\Sigma'(t) = \sum_{i=1}^n \det(x_1(t), \dots, x_{i-1}(t), x_i'(t), x_{i+1}(t), \dots, x_n(t))$$

3) Soient  $E$  un  $\text{con}$  et  $f_i: E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $1 \leq i \leq n$ )  $n$  fcts différentiables à valeurs réelles. On peut considérer le produit

$$\begin{aligned} f: E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f_1(t) \dots f_n(t) \end{aligned}$$

$f$  est  $C^\infty$  et :

$$df(t)h = \sum_{i=1}^n f_1(t) \dots f_{i-1}(t) (df_i(t)h) f_{i+1}(t) \dots f_n(t)$$

soit, si  $E = \mathbb{R}$  :

$$f'(t) = \sum_{i=1}^n f_1(t) \dots f_{i-1}(t) f'_i(t) f_{i+1}(t) \dots f_n(t)$$

On a retrouvé la formule bien connue  $(f_1 \dots f_n)' = \sum_{i=1}^n f_1 \dots f_{i-1} f'_i f_{i+1} \dots f_n$ .

Sait  $\begin{cases} g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \\ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$  définie et différentiable sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer ~~de 2~~ <sup>de 2</sup> façons différentes que  $fg: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est différentiable sur  $U$  et que :

$$a) \quad d(fg) = f dg + g df$$

$$b) \quad d(f_1 \dots f_m) = \sum_{i=1}^m f_1 \dots \hat{f}_i \dots f_m \, df_i \quad (\text{au } m \in \mathbb{N}^*)$$

c)  $d(f^m) = m f^{m-1} df$  (où  $m \in \mathbb{N}^*$ )

a)  $\Rightarrow$  b) et c) est trivial.

- 1<sup>re</sup> méthode: Utilisation de la définition

Heure de a): pour  $x$  fixé dans  $U$ ,

$$\Sigma \triangleq \| f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) - (f(x) dg(x)(h) + g(x) df(x)(h)) \|$$

$$= \| f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x) - ( \quad ) \|$$

$$\leq \underbrace{\|\beta(x+h)g(x+h) - \beta(x+h)g(x) - \beta(x)dg(x)(h)\|}_{A} + \underbrace{\|\beta(x+h)g(x) - \beta(x)g(x) - g(x)df(x)(h)\|}_{B}$$

$$A \leq \underbrace{\|f(x+h)[g(x+h) - g(x) - dg(x)(h)]\|}_{\| \|} + \underbrace{\|(f(x+h) - f(x)) dg(x)(h)\|}_{\| \|}$$

$$\underbrace{\|f(x+h)\|}_{\text{borné}} \underbrace{\|g(x+h) - g(x) - dg(x)(h)\|}_{\leq E \|h\| \text{ si } \|h\| \leq \eta} \leq E \|h\|$$

$$= \underbrace{|\beta(n+h) - \beta(n)|}_{\leq \epsilon} \cdot \underbrace{\|d\beta(n)(h)\|}_{\leq 1}$$

$\leq \varepsilon$   
 si  $\|R\| < \eta$   
 car  $f$  est cont.  
 en  $x$

$$B = \underbrace{|g(n)|}_{\leq \epsilon} \cdot \underbrace{\|f(n+h) - f(n) - df(n)(h)\|}_{\leq \epsilon \|h\| \text{ si } \|h\| < \eta}$$

Ed :

$$\exists \eta \quad \|h\| < \eta \Rightarrow \exists \varepsilon \leq \varepsilon \|h\|$$

traduit bien la différentiabilité de  $f, g$  en  $a$  et l'identité a).

- 2<sup>e</sup> méthode : on peut supposer  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  quitte à troquer  $g$  pour ses fonctions coordonnées  $g_1, \dots, g_p$ .

$$d(fg) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (fg)}{\partial x_i} dx_i \quad (1)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dx_i$$

$$= \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) g + f \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \right)$$

$$= df \cdot g + f \cdot dg$$

Formellement, l'identité est vraie, mais l'on ne peut écrire (1) que si l'on a auparavant démontré que  $fg$  était différentiable en Hpt de  $U$ .

Ainsi, on a 2 possibilités :

- soit on utilise la 1<sup>re</sup> méthode pour prouver cette différentiabilité.
- soit on fait l'hypothèse supplémentaire " $f$  et  $g$  sont de classe  $C^1$  sur  $U$ ", ce qui entraîne l'existence et la continuité des dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  et  $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ , et donc aussi des dérivées partielles  $\frac{\partial (fg)}{\partial x_i}$ . Cela entraîne la différentiabilité de  $fg$  (et même son appartenance à la classe  $C^1$ ).

Cordonnées polaires :Soit  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 

$$(r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

1° Déterminer la matrice jacobienne de  $\varphi$ 2° Exprimer  $r$  en fct de  $x$  et  $y$ .

En notant simplement  $dr$  la différentielle de  $r$  au point  $(x, y)$ ,  
montrer que  $r dr = x dx + y dy$ . En déduire seulement après

$$\frac{\partial r}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial r}{\partial y}.$$

3° Déterminer un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  tq la restriction de  $\varphi$  à  $U$ ,  
notée  $\varphi_0$ , soit un homéomorphisme de  $U$  sur  $\varphi(U)$ .

Expliciter  $\varphi_0^{-1}$ .

4° Mq  $\varphi_0^{-1}$  est différentiable et calculer  $d\varphi_0^{-1}(x, y)$  de deux  
façons différentes.



TD4  
1.8

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(r, \theta) \longmapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

1° Matrice jacobienne de  $\varphi$ :

$$J\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

2° •  $x^2 + y^2 = r^2$  donc  $r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ . En général, on choisit  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

• Rappelons :

Th : Si  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  différentiables en  $x \in \mathbb{R}^n$ , alors  $f \cdot g$  est différentiable en  $x$  et

$$d(fg)(x) = f(x) \cdot dg(x) + g(x) \cdot df(x)$$

En particulier  $d(f^2) = 2f \cdot df$ .

En différentiant  $r^2 = x^2 + y^2$ , on obtient :

$$2r dr = 2x dx + 2y dy$$

$$r dr = x dx + y dy$$

De  $dr = \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy$  on déduit  $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  et  $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

quel'on pouvait aussi calculer directement :

$$3^\circ \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

Si l'on désire l'unicité des antécédents, on doit choisir le signe de  $r$ . Par exemple  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Le point  $(x, y) = (0, 0)$  admet une infinité d'antécédents (les  $(r, \theta) = (0, \theta) \forall \theta \in \mathbb{R}$ ). On l'exclut. Alors :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}} \right\} \begin{array}{l} \text{détermine parfaitement} \\ \theta \text{ modulo } 2\pi \end{array}$$

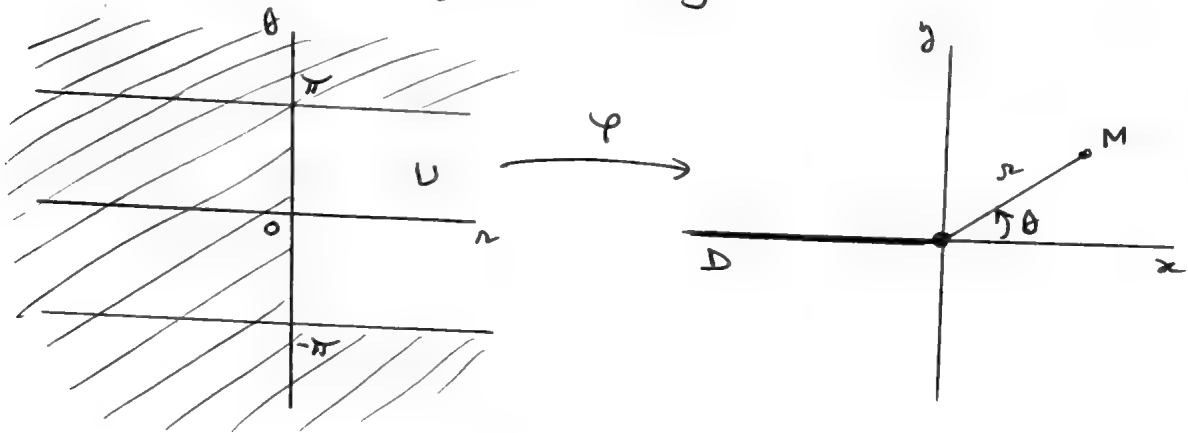
et l'on peut affirmer que :

$$\begin{aligned} \varphi_0 : U &\longrightarrow \varphi(U) \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

est une bijection de  $U = \{(r, \theta) / r > 0 \text{ et } -\pi < \theta < \pi\}$

$$\text{sur } \varphi(U) = \mathbb{R}^2 \setminus D$$

où  $D$  est la demi-droite  $\{(x, 0) / x \leq 0\}$ .



1)  $\varphi$  est différentiable (et même  $C^\infty$ ) sur  $U$  car les fcts  $r \cos \theta$  et  $r \sin \theta$  sont de classe  $C^\infty$  sur cet ouvert.

2) Explicitons  $\varphi_0^{-1}$ ;

Il s'agit de trouver  $\theta \in ]-\pi, \pi[$  tel que :

$$(*) \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases} \quad \text{où } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

On veut qu'un tel  $\theta$  existe et est unique modulo  $2\pi$ . ~~Ex~~ : (cf p3)

~~$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{y}{r}$$~~

~~$$\text{où } t = \tan \frac{\theta}{2}$$~~

~~$$yt^2 - 2xt + y = 0$$~~

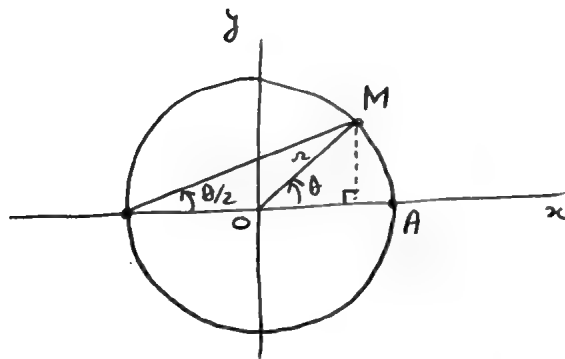
~~$$\Delta' = r^2 - y^2 = x^2$$~~

~~$$t = \frac{r \pm |x|}{y}$$~~

~~$$\text{d'où } \tan \frac{\theta}{2} = \frac{r \pm x}{y}$$~~

(supposons  $y \neq 0$ )

Faisons la construction :



On déduit :

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{y}{x+r}$$

$$\theta = 2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \in ]-\pi, \pi[$$

On a trouvé :

$$\begin{aligned} \varphi_0^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus D &\longrightarrow U \\ (x, y) &\longmapsto \left( \sqrt{x^2 + y^2}, 2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{aligned}$$

et il est facile de voir que les 2 jcts composantes de  $\varphi_0^{-1}$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus D$ .

Cel :  $\varphi_0 : U \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus D$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme

4°. On a déjà montré que  $\varphi_0^{-1}$  était de classe  $C^\infty$  sur  $U$ . Voici une autre méthode :  $\varphi_0 : U \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus D$  est de classe  $C^\infty$ , bijectif, et de différentielle  $d\varphi_0(r, \theta)$  inversible pour tout  $(r, \theta) \in U$  (car  $\det(d\varphi_0(r, \theta)) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r^2 \neq 0$ ). C'est donc un  $C^\infty$ -difféomorphisme local en chaque pt de  $U$ . Comme  $\varphi_0$  est bijectif,  $\varphi_0^{-1}$  sera bien un  $C^\infty$ -difféomorphisme global de  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  sur  $U$ .

• Calcul de  $J(\varphi_0^{-1})(x, y)$  :

1-méthode : on utilise la formule explicite

$$\varphi^{-1}(x, y) = \left( \sqrt{x^2 + y^2}, 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Après simplification des dérivées partielles, on trouve

$$d\varphi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

2-méthode :  $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{Id} \Rightarrow d\varphi(\varphi^{-1}(x, y)) \circ d\varphi^{-1}(x, y) = \text{Id}$

$$\Rightarrow d\varphi^{-1}(x, y) = [d\varphi(\varphi^{-1}(x, y))]^{-1}$$

on rappelle :

$$\begin{cases} d\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \\ (r, \theta) = \varphi^{-1}(x, y) = \left( \sqrt{x^2 + y^2}, 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{cases}$$

et que  $[d\varphi(r, \theta)]^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

De sorte que l'on retrouve

$$d\varphi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix}$$

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel. On note  $(x|y)$  le produit scalaire et on munit  $E \times E$  de la norme  $\|(a,b)\| = \|a\| + \|b\|$ .

a) Montrer que l'application  $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\Phi(x,y) = (x|y)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $E \times E$ , et calculer sa différentielle.

b) Soient :

$$\beta : E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|^2$$

$$g : E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|$$

$$\gamma : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\|x\|}$$

Montrer que  $\beta$  est de classe  $C^\infty$  sur  $E$ , que  $g$  et  $\gamma$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $E \setminus \{0\}$  et calculer leurs différentielles.

**NB** : Fabien avait marqué sur son formulaire, sur le tableau de sa chambre, les bonnes formules :

$$\bullet d((\cdot, \cdot))(x,y)(h,k) = (x,k) + (h,y) \quad \bullet d(\|\cdot\|^2)(x) \cdot h = 2(x|h)$$

$$\bullet d(\|\cdot\|)(x)(h) = \frac{(x|h)}{\|x\|} \quad \bullet d\left(\frac{1}{\|\cdot\|}\right)(x)(h) = -\frac{(x|h)}{\|x\|^3}$$

a) L'application  $\Phi$  est bilinéaire continue (car d'après Cauchy-Schwarz :  $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$ ), donc il suffira de prouver :

Théorème : Si  $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  est bilinéaire continue, elle est de classe  $C^\infty$  et  $d\Phi(x,y)(h,k) = \Phi(x,k) + \Phi(h,y)$

preuve :

$$\bullet \Delta = \|\Phi(x+h, y+k) - \Phi(x,y) - \Phi(x,k) - \Phi(h,y)\| = \|\Phi(h,k)\| \leq \|\Phi\| \|h\| \|k\|$$

$$\text{donc } \Delta \leq \|\Phi\| (\|h\| + \|k\|)^2 = \|\Phi\| \cdot \|(h,k)\|^2 \quad \text{et } \underline{\Delta = o(\|(h,k)\|)}$$

L'application  $\ell : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(h,k) \mapsto \Phi(x,k) + \Phi(h,y)$  est, pour  $(x,y)$  fixé,

linéaire, continue car :

$$\begin{aligned} \|\ell(h,k)\| &\leq \|\Phi(x,k)\| + \|\Phi(h,y)\| \leq \|\Phi\| (\|x\| \|k\| + \|h\| \|y\|) \\ &\leq \|\Phi\| (\|x\| + \|y\|) (\|h\| + \|k\|) \end{aligned}$$

$$\|\ell(h,k)\| \leq \|\Phi\| \cdot \|(x,y)\| \cdot \|(h,k)\| \quad (1)$$

$\ell$  est donc la différentielle de  $\Phi$  en  $(x,y)$  :  $d\Phi(x,y) = \ell$ .



\*  $d\overline{\Phi}: E \times E \rightarrow \mathcal{L}(E \times E, \mathbb{R})$  est linéaire, et continue puisque  
 $(x, y) \mapsto d\overline{\Phi}(x, y)$

d'après (1) :  $\|d\overline{\Phi}(x, y)\| \leq \|\overline{\Phi}\| \|(x, y)\|$

On en déduit que  $\overline{\Phi}$  est de classe  $C^1$ , et que la différentielle de  $d\overline{\Phi}$  en un point  $(x, y)$  est elle-même :

$$\forall (x, y) \in E \times E \quad d^2\overline{\Phi}(x, y) = d\overline{\Phi}$$

L'application  $d^2\overline{\Phi}: E \times E \rightarrow \mathcal{L}(E \times E, \mathcal{L}(E \times E, \mathbb{R}))$  est donc constante, donc  $C^\infty$  et de différentielles successives nulles.

Résumons nous :

$$\overline{\Phi} \text{ est } C^\infty \text{ et : } \begin{cases} d\overline{\Phi}(x, y)(h, k) = \overline{\Phi}(x, k) + \overline{\Phi}(h, y) \\ d^2\overline{\Phi}(x, y) = d\overline{\Phi} \\ d^k\overline{\Phi} = 0 \text{ si } k > 2. \end{cases}$$

b) \*  $f(x) = \overline{\Phi}(x, x)$  est  $C^\infty$  comme composée de 2 fcts  $C^\infty$  :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{i} & E^2 & \xrightarrow{\overline{\Phi}} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x, x) & & \end{array}$$

$$df(x) = d\overline{\Phi}(i(x)) \circ di(x) = d\overline{\Phi}(x, x) \circ i \quad \text{car } i \text{ est linéaire continue, donc } di(x) = i \quad \forall x.$$

$$\text{Soit } df(x)h = d\overline{\Phi}(x, x)(h, h) = \overline{\Phi}(x, h) + \overline{\Phi}(h, x) = 2\overline{\Phi}(x, h)$$

$$\boxed{df(x)h = 2\overline{\Phi}(x, h)}$$

\*  $g = \sqrt{f}$  est  $C^\infty$  sur  $E \setminus \{0\}$  comme composée de fcts  $C^\infty$ , et :

$$dg(x) = d(\sqrt{\cdot})(f(x)) \circ df(x)$$

$$dg(x)h = d(\sqrt{\cdot})(f(x))(2\overline{\Phi}(x, h))$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot 2\overline{\Phi}(x, h) = \frac{\overline{\Phi}(x, h)}{\|x\|}$$

$$\boxed{dg(x)h = \frac{\overline{\Phi}(x, h)}{\|x\|}}$$

NB : En dimension finie, on retrouve ce résultat ainsi :

$$g(x) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$dg(x) = \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} dx_1 + \dots \Rightarrow dg(x)h = \frac{x_1 h_1 + \dots + x_n h_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{(x|h)}{\|x\|}$$

\* On compose à nouveau. Soit  $\varphi: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$   
 $t \mapsto \frac{1}{t}$

$\varphi$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ , donc  $v = \varphi \circ g$  sera  $C^\infty$  sur  $E \setminus \{0\}$  et :

$$dv(x) = d\varphi(g(x)) \circ dg(x)$$

$$dv(x)h = -\frac{1}{(g(x))^2} \cdot \frac{(x|h)}{\|x\|} = -\frac{(x|h)}{\|x\|^3}$$

$$\boxed{dv(x)h = -\frac{(x|h)}{\|x\|^3}}$$

a)  $E, F, G$  sont des e.v.n. sur  $\mathbb{R}$

Soit  $\varphi : E \times F \rightarrow G$  une application bilinéaire continue. Montrer que  $\varphi$  est de classe  $C^\infty$  sur  $E \times F$  et calculer ses différentielles successives.

b) Si  $\beta : H \rightarrow E \times F$  est différentiable sur l'e.v.n.  $H$ ,  
 $x \mapsto (\beta_1(x), \beta_2(x))$

mq l'application  $F : H \rightarrow G$  définie par  $F(x) = \varphi(\beta_1(x), \beta_2(x))$  est différentiable et que :

$$\forall x \in H \quad dF(x)h = \varphi(\beta_1(x), d\beta_2(x)h) + \varphi(d\beta_1(x)h, \beta_2(x))$$

c) Applications : Étudiez la différentiabilité et exhibez les différentielles des applications suivantes :

1)  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  où  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont des appl. différentiables  
 $t \mapsto (\vec{u}(t) | \vec{v}(t))$

de  $\mathbb{R}$  vers un espace préhilbertien réel  $E$  dont le produit scalaire est noté  $(\cdot | \cdot)$ .

2)  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  où  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont différentiables de  $\mathbb{R}$  vers  
 $t \mapsto \vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t)$  un espace euclidien orienté  $E$  de dim. 3.

3)  $F : E \rightarrow \mathbb{R}$  où  $\beta_i : E \rightarrow \mathbb{R}$  sont différentiables  
 $x \mapsto \beta_1(x) \cdot \beta_2(x)$  de l'e.v.n.  $E$  sur  $\mathbb{R}$ .

a)  $\Delta = \|\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y) - \varphi(x, k) - \varphi(h, y)\| = \|\varphi(h, k)\| \leq M \|h\| \|k\|$   
 car  $\varphi$  est bilinéaire continue.  $E \times F$  est structuré en e.v.n de façon canonique pour l'une des normes équivalentes  $\|(x, y)\|_1 = \|x\| + \|y\|$  ou  $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$  ou encore  $\|(x, y)\|_\infty = \sup(\|x\|, \|y\|)$ . Choisissons  $\|(x, y)\| \doteq \|x\| + \|y\|$ .  
 On a :  $\Delta \leq M (\|h\| + \|k\|)^2 = M \|(h, k)\|^2$  donc  $\Delta = o(\|(h, k)\|)$ .

L'application  $\ell : E \times F \rightarrow G$   
 $(h, k) \mapsto \varphi(x, k) + \varphi(h, y)$  , pour  $(x, y)$  fixé,

est linéaire, continue car :

$$\begin{aligned} \|l(h,k)\| &\leq \|\varphi(x,k)\| + \|\varphi(h,y)\| \leq \|\varphi\| (\|x\| \|k\| + \|h\| \|y\|) \\ &\leq \|\varphi\| (\|x\| + \|y\|) (\|h\| + \|k\|) \\ \|l(h,k)\| &\leq \|\varphi\| \|(x,y)\| \|(h,k)\| \end{aligned} \quad (1)$$

l sera donc la différentielle de  $\varphi$  au point  $(x,y)$  :

$$\boxed{d\varphi(x,y)(h,k) = \varphi(x,k) + \varphi(h,y)} \quad (2)$$

\*  $d\varphi : E \times F \longrightarrow \mathcal{L}(E \times F, G)$  est linéaire, continue car d'après (1) :  
 $(x,y) \longmapsto d\varphi(x,y)$

$$\|d\varphi(x,y)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|(x,y)\| \quad (\text{et donc } \|d\varphi\| \leq \|\varphi\|)$$

La différentielle de  $d\varphi$  en tout point  $(x,y)$  sera donc elle-même :

$$\forall (x,y) \in E \times F \quad d^2\varphi(x,y) = d\varphi$$

Autrement dit,  $\varphi$  est 2 fois différentiable, et  $d^2\varphi$  est l'application constante :

$$\begin{aligned} d^2\varphi : E \times F &\longrightarrow \mathcal{L}(E \times F, \mathcal{L}(E \times F, G)) \\ (x,y) &\longmapsto d\varphi \end{aligned}$$

$d^2\varphi$  sera différentiable et  $d^3\varphi = 0, \dots, d^k\varphi = 0$  pour tout  $k > 2$ .

b)  $F$  est différentiable comme composée de 2 fcts différentiables et :

$$dF(x) = d\varphi(\beta(x)) \circ df(x)$$

$$\begin{aligned} dF(x)h &= d\varphi(\beta_1(x), \beta_2(x))(df_1(x)h, df_2(x)h) \\ &= \varphi(\beta_1(x), df_2(x)h) + \varphi(df_1(x)h, \beta_2(x)) \end{aligned}$$

Formule que l'on peut retenir ainsi :

$$d(\varphi(\beta_1, \beta_2)) = \varphi(\beta_1, d\beta_2) + \varphi(d\beta_1, \beta_2)$$

c) Toutes ces appl. sont différentiables, et l'on a :

$$1) \quad dF(t)h = (\vec{u}(t) \mid d\vec{z}(t)h) + (d\vec{u}(t)h \mid \vec{z}(t))$$

Soi  $\vec{u} : \mathbb{R} \rightarrow E$  donc  $d\vec{u}(t)(h) = \vec{u}'(t)h$  où  $\vec{u}'(t)$  est le vecteur dérivé de  $\vec{u}$  en  $t$ . On aura, avec des dérivées :

$$F'(t) = (\vec{u}(t) \mid \vec{z}'(t)) + (\vec{u}'(t) \mid \vec{z}(t))$$

2) De même :

$$F'(t) = -(\vec{u}(t) \wedge \vec{z}'(t) + \vec{u}'(t) \wedge \vec{z}(t))$$

$$3) \quad \text{Soi : } dF(t)h = \beta_1(t) \cdot df_2(t)h + df_1(t)h \cdot \beta_2(t)$$

Si, de plus,  $\beta_i : E = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fct réelle de variable réelle, alors  $df_i(t) \cdot h = \beta_i'(t)h$  d'où :

$$\underbrace{F'(t)}_{(\beta_1\beta_2)'(t)} = \beta_1(t) \cdot \beta_2'(t) + \beta_1'(t) \beta_2(t)$$

On retrouve la formule bien connue !



Étudier la différentiabilité des fonctions  $f$  dans chacun des cas suivants et définir la différentielle :

a)  $f(x, y) = e^{xy} (x+y)$

b)  $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{pour } (x, 0) \end{cases}$

a) Les dérivées partielles existent et sont continues, donc  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et  $df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy$ , avec

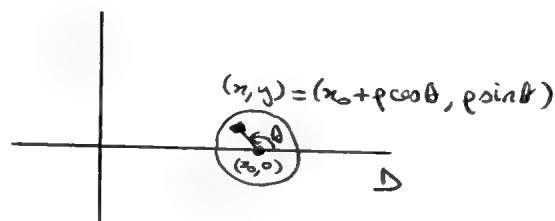
$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy} (y^2 + xy + 1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy} (x^2 + xy + 1)$$

NB : Cela signifie que  $df(x, y)(h, k) = e^{xy}(y^2 + xy + 1)h + e^{xy}(x^2 + xy + 1)k$

b) Notons  $D = \{(x, y) / y = 0\}$

\* Continuité de  $f$  en  $(x_0, 0)$  ?

Si  $(x, y) \notin D$ ,  $f(x, y) = \rho^2 \sin^2 \theta \cdot \sin \left( \frac{x_0 + \rho \cos \theta}{\rho \sin \theta} \right)$



donc  $|f(x, y)| \leq \rho^2$ , et  $|f(x, y) - f(x_0, 0)| \leq \rho^2 \leq \epsilon$  sera assuré dès que  $\rho^2 \leq \epsilon$ , ie  $\rho \leq \sqrt{\epsilon}$ , ie  $\|(x, y) - (x_0, 0)\| < \sqrt{\epsilon}$ .

$f$  est continue sur  $D$ . Étant  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus D$ ,  $f$  sera continue sur  $\mathbb{R}^2$  entier.

NB :

1) Pas nécessaire d'avoir recours à  $\rho \cos \theta, \rho \sin \theta$  pour conclure ici, même si cette méthode est très efficace. En effet :

$$|f(x, y)| \leq y^2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{est trivial!}$$

2) Si  $f$  vérifie :

$$\forall \epsilon \quad \exists \eta \quad \|(h, k)\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x, y) + (h, k) - f(x, y) - l(h, k)\| \leq \epsilon \|(h, k)\|$$

pour une appl. linéaire  $l$  convenable, les dim. étant finies,  $l$  sera continue, ~~donc~~ et l'on déduit alors que  $f$  sera continue aussi.

On peut donc directement se poser la question suivante :

\* Différentiabilité en  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos \frac{x}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin \frac{x}{y} - x \cos \frac{x}{y} \end{cases}$$

Ces dérivées partielles existent et sont continues (comme fct de  $(x, y)$ ) sur  $\mathbb{R}^2 \setminus D$ . Un Théorème du cours assure alors que  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus D$

NB: Ici,  $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$  n'existe pas dès que  $x_0 \neq 0$ , d'où que même si  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)$  existe,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  ne sera pas continue en  $(x_0, 0)$ .

\* Les dérivées partielles en  $(x_0, 0)$  sont-elles définies?

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y - 0} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{y^2 \sin \frac{x_0}{y}}{y} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x, 0) - f(x_0, 0)}{x - x_0} = 0$$

Les dérivées partielles existent bien en  $(x_0, 0)$  et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) = 0$$

\*  $f$  est-elle différentiable en  $(x_0, 0)$ ? Si oui, on aurait nécessairement

$$df(x_0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) dy = 0$$

Nous n'avons qu'à vérifier que :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad \|(h, k)\| < \eta \Rightarrow \|f(x_0 + h, k) - f(x_0, 0)\| \leq \varepsilon \|(h, k)\|$$

ie, pour  $k \neq 0$  :

$$\left| k^2 \sin \frac{x_0 + h}{k} \right| \leq \varepsilon \|(h, k)\| \quad (*)$$

(\*) est vraie car  $\left| k^2 \sin \frac{x_0 + h}{k} \right| \leq k^2$ , donc (\*) est entraîné par  $k^2 \leq \varepsilon \sqrt{h^2 + k^2}$ , ie  $|k| \leq \varepsilon \sqrt{1 + \left(\frac{h}{k}\right)^2}$ , entraîné par  $|k| \leq \varepsilon$ , lui-même entraîné par  $\sqrt{h^2 + k^2} = \|(h, k)\| \leq \varepsilon$ .  
Concl :  $f$  est différentiable en  $(x_0, 0)$  et  $df(x_0, 0) = 0$

$$\text{Mq } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{admet une dérivée selon}$$

tout vecteur, mais n'est pas différentiable en  $(0,0)$ .

\*  $f$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , donc admet une dérivée suivant tout vecteur en tout pt  $x$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , à savoir  $\frac{\partial f}{\partial u}(x) = df_u(x)$ .

\* En  $(0,0)$  :

Soit  $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$  un vecteur fixé non nul. La dérivée suivant le vecteur  $u$  en  $0 = (0,0)$  est la limite, si elle existe, du quotient

$$\frac{f(0+tu) - f(0)}{t} \quad \text{quand } t \rightarrow 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) \doteq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+tu) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu)}{t}$$

$$\text{ici } \frac{f(tu)}{t} = \frac{t^2 u_1^2 \cdot t u_2}{t(t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2)} = \frac{u_1^2 u_2}{u_1^2 + u_2^2}$$

de sorte que  $\boxed{\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \frac{u_1^2 u_2}{u_1^2 + u_2^2}}$

\* Ainsi les dérivées partielles de  $f$  en  $(0,0)$  existent et valent :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial e_1}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial e_2}(0,0) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{où } e_1 = (1,0) \\ e_2 = (0,1) \end{array}$$

Si  $f$  était différentiable en  $0$ , on aurait

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad \|(h,k)\| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(h,k) - f(0,0)| < \varepsilon \|(h,k)\|$$

$$\text{ie } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 k}{(h^2 + k^2)^{3/2}} = 0 \quad (*)$$

Mais en posant  $h = p \cos \theta$  et  $k = p \sin \theta$ ,  $p^2 = h^2 + k^2$

$$\frac{h^2 k}{(h^2 + k^2)^{3/2}} = \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{1}$$

d'où l'on déduit que (\*) est faux.

NB: On pourrait aussi conclure sans passer par  $(p, \theta)$  en faisant  $h = k$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{h^2 k}{(h^2 + k^2)^{3/2}} \right) = \frac{2h \dot{h} k + h^2 \dot{k}}{(h^2 + k^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{(h^2 + k^2)^{1/2} (2h \dot{h} + 2k \dot{k})}{(h^2 + k^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{h^2 k}{(h^2 + k^2)^{3/2}} \right) = \frac{2h \dot{h} k + h^2 \dot{k}}{(h^2 + k^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{(h^2 + k^2)^{1/2} (2h \dot{h} + 2k \dot{k})}{(h^2 + k^2)^{3/2}}$$

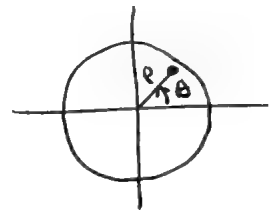
$$\left( \begin{array}{l} (p, \theta) \rightarrow (p \cos \theta, p \sin \theta) \\ (h, k) \rightarrow (h \cos \theta, h \sin \theta) \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{h^2 k}{(h^2 + k^2)^{3/2}} \right) = \frac{2h \dot{h} k + h^2 \dot{k}}{(h^2 + k^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{(h^2 + k^2)^{1/2} (2h \dot{h} + 2k \dot{k})}{(h^2 + k^2)^{3/2}} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{h^2 k}{(h^2 + k^2)^{3/2}} \right) = \frac{2h \dot{h} k + h^2 \dot{k}}{(h^2 + k^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{(h^2 + k^2)^{1/2} (2h \dot{h} + 2k \dot{k})}{(h^2 + k^2)^{3/2}} \end{array} \right)$$

Étudier la continuité à l'origine des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}^2$

$$a) \begin{cases} f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + 2y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$a) f(x, y) = \frac{\rho^3(\cos^3\theta - \sin^3\theta)}{\rho^2} = \rho(\cos^3\theta - \sin^3\theta)$$



$$\text{donc } |f(x, y)| \leq 2\rho$$

$|f(x, y)| \leq \varepsilon$  sera assuré dès que  $2|\rho| < \varepsilon$ , ie  $|\rho| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,

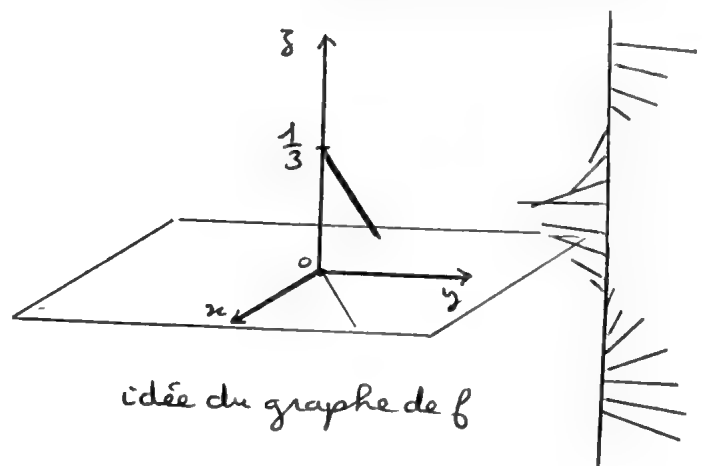
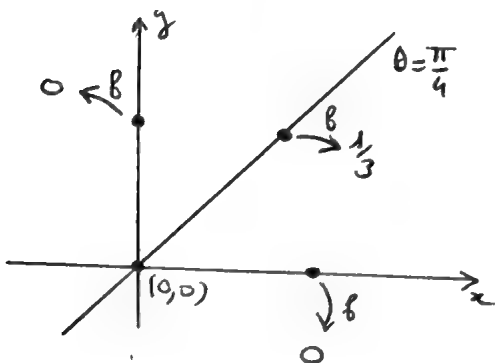
ie  $\|(x, y) - (0, 0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ .  $f$  sera donc continue en  $(0, 0)$ .

$$b) f(x, y) = \frac{\rho^2 \sin\theta \cos\theta}{\rho^2(\cos^2\theta + 2\sin^2\theta)} = \frac{\sin\theta \cos\theta}{1 + \sin^2\theta}$$

Si  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $f(x, y) = \frac{1}{3}$  pour tous  $\rho$ .

Si  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $f(x, y) = 0$  pour tous  $\rho$ .

$f$  ne sera donc pas continue en  $(0, 0)$ . En fait :  $f$  ne peut pas être prolongée par continuité en  $(0, 0)$ .



Th: Inégalité des Accroissements Finis, version de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}^p$

Soit  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est continue sur  $[a, b] \subset U$  et dérivable sur  $]a, b[$ , alors

$$\|f(b) - f(a)\|_\infty \leq \left( \sup_i \left( \sup_{c \in ]a, b[} \|\nabla f_i(c)\|_2 \right) \right) \cdot \|b - a\|_2$$

où  $f = (f_1, \dots, f_p)$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

désigne la norme de  $\mathbb{R}^n$  dérivant du produit scalaire canonique

$$\|y\|_\infty = \sup_j |y_j|$$

$$\nabla f_i(c) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(c), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(c) \right)$$

preuve:

La version classique du Théorème est:

$$\|f(b) - f(a)\|_\infty \leq \sup_{c \in ]a, b[} \|df(c)\| \cdot \|b - a\|_2$$

et tout revient à prouver que

$$\|df(c)\| = \sup_i \|\nabla f_i(c)\|_2$$

La norme opérateur  $\|df(c)\|$  est ici:

$$\begin{aligned} \|df(c)\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|df(c)(x)\|_\infty}{\|x\|_2} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sup_i |df_i(c)(x)|}{\|x\|_2} \\ &= \sup_i \sup_{x \neq 0} \frac{|df_i(c)(x)|}{\|x\|_2} \end{aligned}$$

puisque  $df(c)(x) = (df_1(c)(x), \dots, df_p(c)(x))$ . Le lemme suivant permet de conclure:

Lemme: Soit  $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

vérifie  $\|l\| \doteq \sup_{x \neq 0} \frac{|l(x)|}{\|x\|_2} = \|a\|_2$  où  $a \doteq (a_1, \dots, a_n)$

preuve du lemme:  $\frac{|l(x)|}{\|a\|_2} = \frac{|a_1 x_1 + \dots + a_n x_n|}{\|a\|_2 \|x\|_2} = \frac{|a \cdot x|}{\|a\|_2 \|x\|_2} \leq \|a\|_2$  d'après Cauchy-Schwarz, donc  $\|l\| \leq \|a\|_2$

D'autre part  $\frac{l(a)}{\|a\|_2} = \|a\|_2$  prouve que  $\|l\| \geq \|a\|_2$   $\square$

a) Calculer les dérivées partielles premières et seconde des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = xy$$

$$f(x, y) = \ln(xy)$$

$$f(x, y) = \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}$$

b) Donner le développement limité à l'ordre 1 au point (1,1) de la fonction  $f(x, y) = x \ln y + y \ln x$ .

a)  $f(x, y) = xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

$f(x, y) = \ln(xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$f(x, y) = \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

b) Taylor-Young à l'ordre 1 :

$$f(x, y) = f(1, 1) + df(1, 1)(x-1, y-1) + o(\|h\|) \quad \text{avec } h = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

On a  $f(1, 1) = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \ln y + \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \ln x + \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1 \end{cases}$$

$$\text{donc } df(1, 1)(x-1, y-1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y-1) \\ = x + y - 2$$

Cel :

$$f(x, y) = x + y - 2 + o(\|h\|)$$

NB : cela peut encore s'écrire

$$f(x, y) = x + y - 2 + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \cdot \varepsilon(x, y)$$

$$\text{avec } \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} \varepsilon(x, y) = 0$$



Dérivée suivant une direction

Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application différentiable en  $x \in \mathbb{R}^n$ .

- 1) Hq  $f$  admet une dérivée en  $x$  suivant n'importe quelle direction  $u$ , notée  $D_u f(x)$  et que

$$D_u f(x) = df(x)(u)$$

- 2) Si  $u = (1, 0, \dots, 0)$ , à quoi est égal le nombre  $D_u f(x)$  ?

- 1) Par définition,  $D_u f(x)$  est la dérivée en 0 de l'application  $t \mapsto f(x + tu)$ , i.e.:

$$D_u f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}$$

Prenons la différentielle de l'appl. composée :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\Psi} & E = \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & x + tu & \mapsto & f(x + tu) \end{array}$$

$$\begin{aligned} D_u f(x) &\doteq (f \circ \Psi)'(0) = df(\Psi(0))(\Psi'(0)) \\ &= df(x)(u) \end{aligned}$$

- 2) Par déf. de  $D_u f(x)$ :

$$D_u f(x) = D_{(1, 0, \dots, 0)} f(x) \doteq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + t, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t} \doteq \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$$

Théorème de Poincaré : $D$  disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$  $\omega = P dx + Q dy$  = forme différentielle de degré 1 sur  $D$ 

Si  $P$  et  $Q$  admettent des dérivées partielles en  $x$  et  $y$  continues sur  $D$   
 (ie si  $P$  et  $Q$  sont de classe  $C^1$  sur  $D$ ), alors :  
 (ie si  $\omega$  est de classe  $C^1$ )

$$\exists f \quad df = \omega \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$



$\omega$  exacte  
 (ou "totale")  
 sur  $D$



$\omega$  fermée sur  $D$

(réf. [M] Gouty-Ezra 67 pp 83-86)

NB : Le Th. de Schwarz énonce que "si  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  admet des dérivées partielles secondes continues en  $a$ , alors  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$ ". Dans le Th. préc., cela éclaire le sens  $(\Rightarrow)$  et permet de retenir la formule " $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ " définissant une forme fermée.

Version plus forte de ce Théorème : $D = \emptyset$  ouvert simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$  $\omega$  = forme différentielle de degré 1 et de classe  $C^0$  sur  $D$ 

Alors :

$$\omega \text{ exacte sur } D \quad \Leftrightarrow \quad \omega \text{ fermée sur } D$$

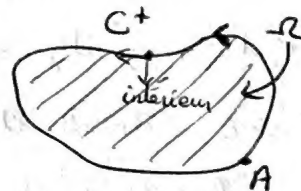
( [M] Gouty-Ezra 67 p 364 )

Formule de Green-Riemann :

$$\int_{C^+} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$C^+ = \partial \Omega =$  bord orienté de  $\Omega$

$C^+$  est un chemin fermé.



(M) Gouty-Egna 67 p 353)

NB : Si  $\omega = P dx + Q dy$  est exacte,  $\int_{C^+} \omega = \int_{C^+} df = f(A) - f(A) = 0$

puisque  $C^+$  est un chemin fermé

Cela permet de revenir le  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$  dont la nullité signifie que  $\omega$  est fermée.